

مربع‌های جادویی

اشاره

در این مقاله که حاصل تجربیات شخصی بنده در دوران تدریس درس ریاضیات گسسته است، بنابر علاقه شخصی به این درس و اینکه مطرح کردن سؤالات هوش همیشه برایم خوشایند بوده است، بر آن شدم که طرز ساخت مربع‌های جادویی (وقفی) را بیان کنم تا خوانندگان به راحتی بتوانند ماتریسی n در n بسازند که حاصل جمع درایه‌های هر سطر، هر ستون و حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی و حاصل جمع درایه‌های قطر فرعی آن عدد ثابتی شود و بسته به انتخاب عدد n ، این عدد ثابت تغییر کند. سپس از روی این مربع‌های وقفی برچسب‌گذاری جادویی را برای گراف‌ها مطرح کرده‌ام.

تعریف ۱

یک ماتریس $n \times n$ از اعداد متمایز (مانند $n^2, \dots, 3, 2, 1$) را یک مربع وقفی می‌نامند، هرگاه حاصل جمع درایه‌های هر سطر، هر ستون، قطر اصلی و قطر فرعی آن عدد ثابتی شود و با هم برابر باشند. بسته به انتخاب عدد n ، این عدد ثابت تغییر می‌کند. برای مثال یک مربع وقفی 3×3 در شکل ۱ نشان داده شده که عدد ثابت آن ۱۵ است.

۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

شکل ۱. مربع جادویی 3×3

ثابت می‌شود که در هر مربع وقفی 3×3 که از اعداد $1, 2, \dots, 9$ تشکیل شده باشد، عضوی که در مرکز مربع قرار می‌گیرد، همیشه عدد ۵ است (به راحتی تحقیق می‌شود).

تعریف ۲

گراف G داده شده است. یک برچسب‌گذاری گراف G عبارت است از متناظر کردن اعدادی، معمولاً صحیح و مثبت، به یال‌های G به‌طوری که حاصل جمع اعداد متناظر با یال‌های مرورکننده بر هر رأس، عددی ثابت باشد.

کلیدواژه‌ها: مربع‌های وقفی، برچسب‌گذاری جادویی، گراف.

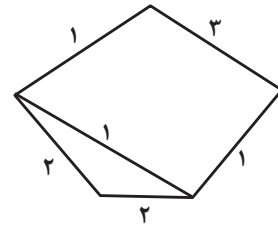
مقدمه

یادم هست، از بچگی که همیشه بزرگ‌ترها سؤالات هوش یا فکری برایم مطرح می‌کردند (که یکی از آن‌ها همین داستان است که مربعی بسازید که چنین خاصیتی داشته باشد و نظایر آن)، این سؤال برایم پیش آمده بود که: آیا برای این سؤالات می‌توان ایده‌ای کلی یافت؟ این مطالب حین تدریس ریاضیات گسسته (قسمت ترکیبیات) هنگام رسیدن به قسمت برچسب‌گذاری جادویی برای گراف‌ها و اینکه گرافی را تحت شرایط خاصی برچسب زد، دوباره برایم تداعی شد. معرفی مربع‌های وقفی شور و شوقی عجیب در دانش‌آموزان به‌وجود می‌آورد. حتی یادش بخیر، دانش‌آموزی داشتم که خیلی به «سودوکو» علاقه‌مند بود و می‌گفت با این ایده از این پس می‌توانم جدول‌های سودوکو را حل کنم. من هم ضمن تشویق ایشان برای انجام این خلاقیت، پیشنهاد دادم نتیجه را حتماً به شکل یک کنفرانس، سرکلاس درس به بچه‌ها هم ارائه دهد و ...



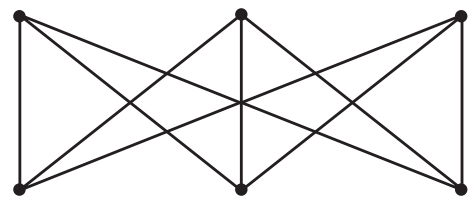
فرزاد حمزه‌پور
دبیر ریاضی از شهرستان بانه

مثال: گراف شکل ۲ برچسب‌گذاری شده است (باعده ثابت ۴).



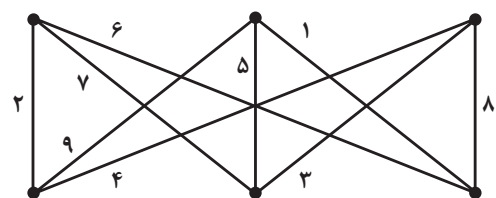
شکل ۲. برچسب‌گذاری جادویی گراف

حال فرض کنید که می‌خواهیم گراف دو پارچه شکل ۳ را برچسب‌گذاری کنیم.



شکل ۳

آیا با دیدن اینکه درجه همه رئوس گراف مساوی است و ما می‌خواهیم متناظر با هر رأس، سه عدد روی سه یال گذرنده از آن قرار دهیم که مجموع آن‌ها مقداری ثابت شود، به یاد مربع وقتی 3×3 نمی‌افتیم؟ با توجه به تعداد یال‌های این گراف (۹ یال) و مجموع سطرها و ستون‌ها و قطرهای مربع وقتی، برچسب‌گذاری به راحتی مقدور می‌شود که آن را در شکل ۴ مشاهده می‌کنیم.



شکل ۴. برچسب‌گذاری جادویی گراف با مربع جادویی

پرسیده شد که آیا غیر از مربع‌های جادویی 3×3 می‌توان مربع‌های وقتی $n \times n$ را نیز ساخت؟ مجموع آن‌ها را چگونه محاسبه می‌کنند؟ این سؤال باعث شد تا با تحقیق، مراحل زیر را برای پاسخ سؤال طی کنیم:

سؤال اول: مجموع اعداد در مربع وقتی چگونه به دست می‌آید؟

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2}$$

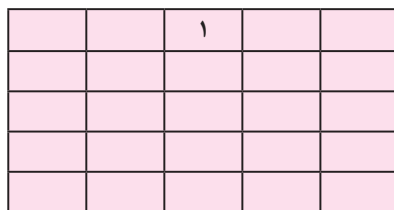
$$\Rightarrow A = \frac{S}{n} = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$$

که A عدد ثابت مربع وقتی است.

سؤال دوم: با ارائه یک مثال، یک مربع وقتی $n \times n$ که n فرد باشد، طراحی کنید.

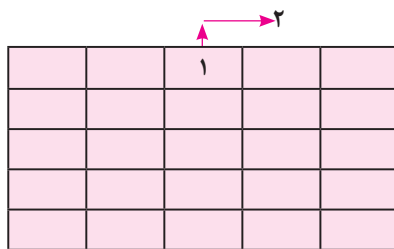
روش حل:

۱. عدد ۱ را در وسط سطر اول قرار می‌دهیم.



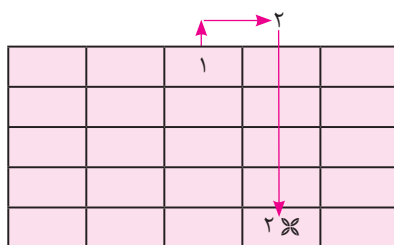
شکل ۵

۲. به کمک جهت‌یاب \uparrow یک حرکت به بالا و یک حرکت به راست انجام می‌دهیم و عدد بعدی یعنی ۲ را قرار می‌دهیم.



شکل ۶

۳. چون خانه‌ای نیست به آخرین خانه زیر خودش در ستون موردنظر (⊗) می‌رویم و ۲ را آنجا قرار می‌دهیم.



شکل ۷

